الموضوع المحاضرة : الثالثة ...

وبالتالي : $X^c = \emptyset \in H$

$X \in H \Rightarrow$ H جبر-σ X

★ جبر بوريل :

- ليكن (X,d) فضاءً متريًا وليكن Θ صف المجموعات المفتوحة في (X,d) هنا $(\Theta \subset 2^X)$.

تعريف : جبر بوريل في الفضاء (X,d) هو σ-الجبر المولّد بصف المجموعات المفتوحة Θ . ونرمز له ب B_X

أي أن : $B_X = \mathcal{F}_\sigma(\Theta)$

وكل مجموعة من B_X نسميها مجموعة بوريلية.

نتيجة :

1) بما أن $\Theta \subset B_X$ فإن كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة بوريلية.

2) - كل مجموعة مغلقة هي مجموعة بوريلية. (لأنها متممة مجموعة مفتوحة).

3) - كل مجموعة متراصة هي مجموعة بوريلية. (لأنها مغلقة ومحدودة)

4) - المجموعة X بوريلية.

★ ملاحظة :

لنرمز ب Θ و C و K على الترتيب لصف المجموعات المفتوحة والمغلقة والمتراصة عندئذٍ يكون :

$\Theta \subset B_X$, $C \subset B_X$, $K \subset B_X$

والأهم من ذلك هو المبرهنة التالية :

الموضوع

جبر هنقة:

كل من الصفوف: Θ و C و K.
تولد جبر بوريل B_X أي أن:

$$B_X = \mathcal{F}_\sigma(\Theta) = \mathcal{F}_\sigma(C) = \mathcal{F}_\sigma(K)$$

★★ ملاحظة:

يوجد مجموعات أخرى بوريلية وهي: ليست مفتوحة وليست مغلقة وليست متراصة. كما سنلاحظ بعد قليل.

★★ جبر بوريل في $\mathbb{R}^n$:

معلوم أن المجموعة $\mathbb{R}^n$ مؤلفة من العناصر ذات الشكل:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \;;\; x_i \in \mathbb{R}$$

كما أن: $\mathbb{R}^n$ فضاء متري مع كل من:

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \;;\; x,y \in \mathbb{R}^n$$

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \;;\; x,y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \;;\; x,y \in \mathbb{R}^n \;;\; 1 \leq p < \infty$$

$$d_\infty(x,y) = \sup_i |x_i - y_i| \;;\; x,y \in \mathbb{R}^n$$

★ وهذه المتارك (المسافات) متكافئة فيما بينها، أي يوجد عددين موجبين c_1 و c_2 بحيث يكون:

$$c_1\, d'(x,y) \leq d''(x,y) \leq c_2\, d'(x,y) \;;\; \forall x,y \in \mathbb{R}^n$$

حيث أن: d' و d'' أي مترك من المذكورين أعلاه.

- الآن لنرمز بـ $(\mathbb{R}^n, d)$ للفضاء المتري، حيث d أي مترك من المذكورين أعلاه.

الموضوع

- حسب ما ذكرنا منذ البداية يوجد في (R^n, d) مجموعات مفتوحة ومجموعات مغلقة ومجموعات متراصة وأنواع أخرى من المجموعات الجزئية في (R^n, d).

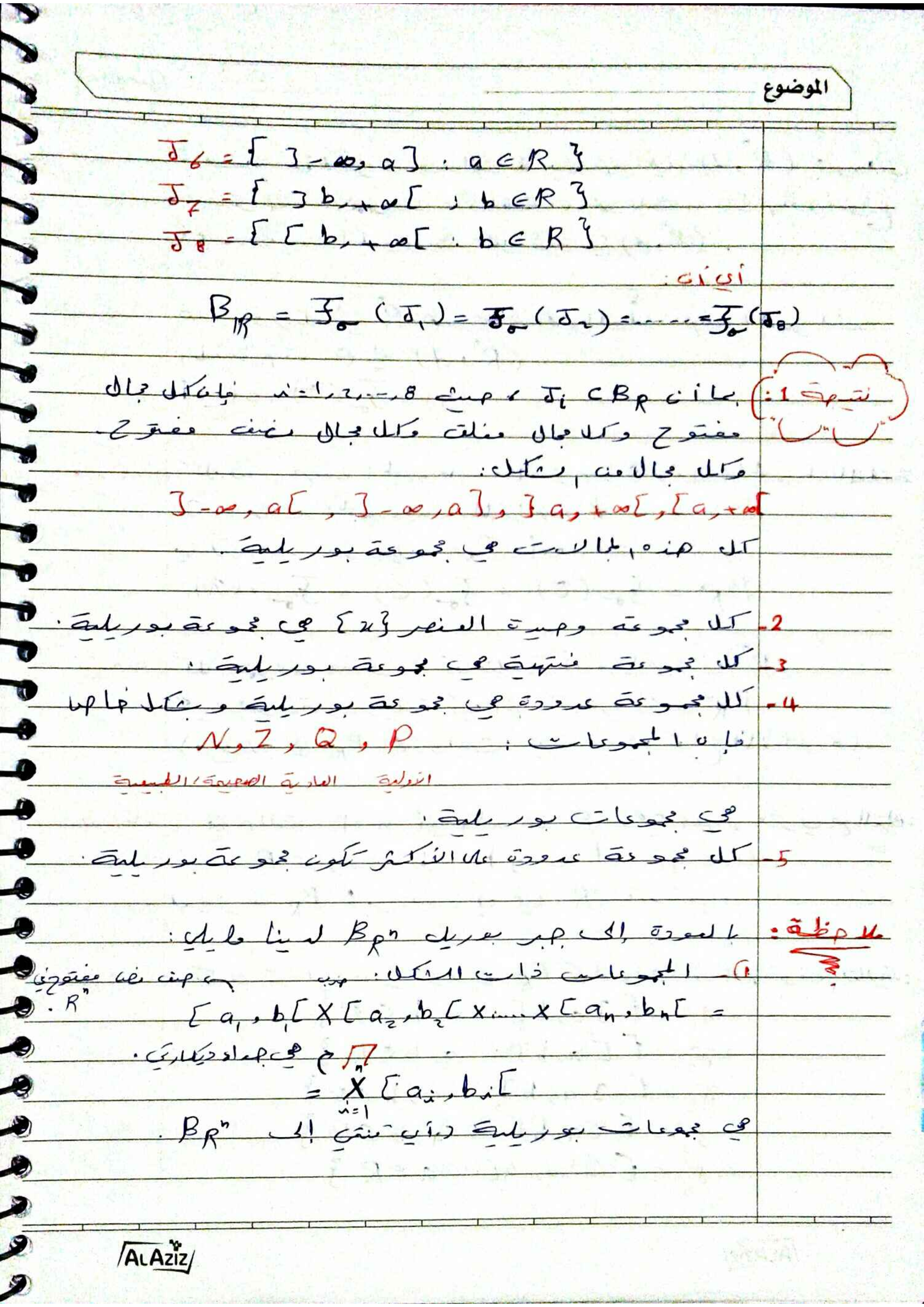
تعريف: جبر بوريل في R^n هو σ- الجبر المولد بصنف المجموعات المفتوحة Θ في (R^n, d).
أي: $B_{R^n} = \mathcal{F}_\sigma(\Theta)$.

مبرهنة: كل من: صنف المجموعات المفتوحة Θ وصنف المجموعات المغلقة C وصنف المجموعات المتراصة K.
يولد جبر بوريل B_{R^n} أي أن:
$$B_{R^n} = \mathcal{F}_\sigma(\Theta) = \mathcal{F}_\sigma(C) = \mathcal{F}_\sigma(K)$$

نتيجة: كل مجموعة مفتوحة أو مغلقة أو متراصة في R^n.
هي مجموعة بوريلية أي أنها تنتمي إلى B_{R^n}.
(ويوجد في B_{R^n} مجموعات ليست من الأنواع المذكورة).

ملاحظة: في حالة $n = 1$ أي المجموعة R وهي فضاء متري مع المترك:
$$d(x,y) = |x - y| \quad ; \quad x, y \in R$$
- نرمز بـ B_R لجبر بوريل في R عندئذ:

مبرهنة: يمكن توليد جبر بوريل B_R بكل واحد من الصفوف التالية:
$$J_1 = \{]a,b[: a,b \in R \}$$
$$J_2 = \{ [a,b] : a,b \in R \}$$
$$J_3 = \{]a,b] : a,b \in R \}$$
$$J_4 = \{ [a,b[: a,b \in R \}$$
$$J_5 = \{]-\infty, a[: a \in R \}$$



$\mathcal{J}_6 = \{]-\infty, a] : a \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{J}_7 = \{]b, +\infty[; b \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{J}_8 = \{ [b, +\infty[: b \in \mathbb{R} \}$

أي أن:

$$B_{\mathbb{R}} = \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{J}_1) = \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{J}_2) = \dots = \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{J}_8)$$

نتيجة 1: بما أن $\mathcal{J}_i \subset B_{\mathbb{R}}$ ، حيث $i = 1, 2, \dots, 8$ فإن كل مجال مفتوح وكل مجال مغلق وكل مجال نصف مفتوح.
وكل مجال من الشكل:

$]-\infty, a[\ , \ ]-\infty, a] \ , \ ]a, +\infty[\ , \ [a, +\infty[$

كل هذه المجالات هي مجموعة بوريلية.

2- كل مجموعة وحيدة العنصر $\{x\}$ هي مجموعة بوريلية.

3- كل مجموعة منتهية هي مجموعة بوريلية.

4- كل مجموعة معدودة هي مجموعة بوريلية وبشكل خاص فإن المجموعات: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, P$

الأولية العادية الصحيحة الطبيعية

هي مجموعات بوريلية.

5- كل مجموعة معدودة على الأكثر تكون مجموعة بوريلية.

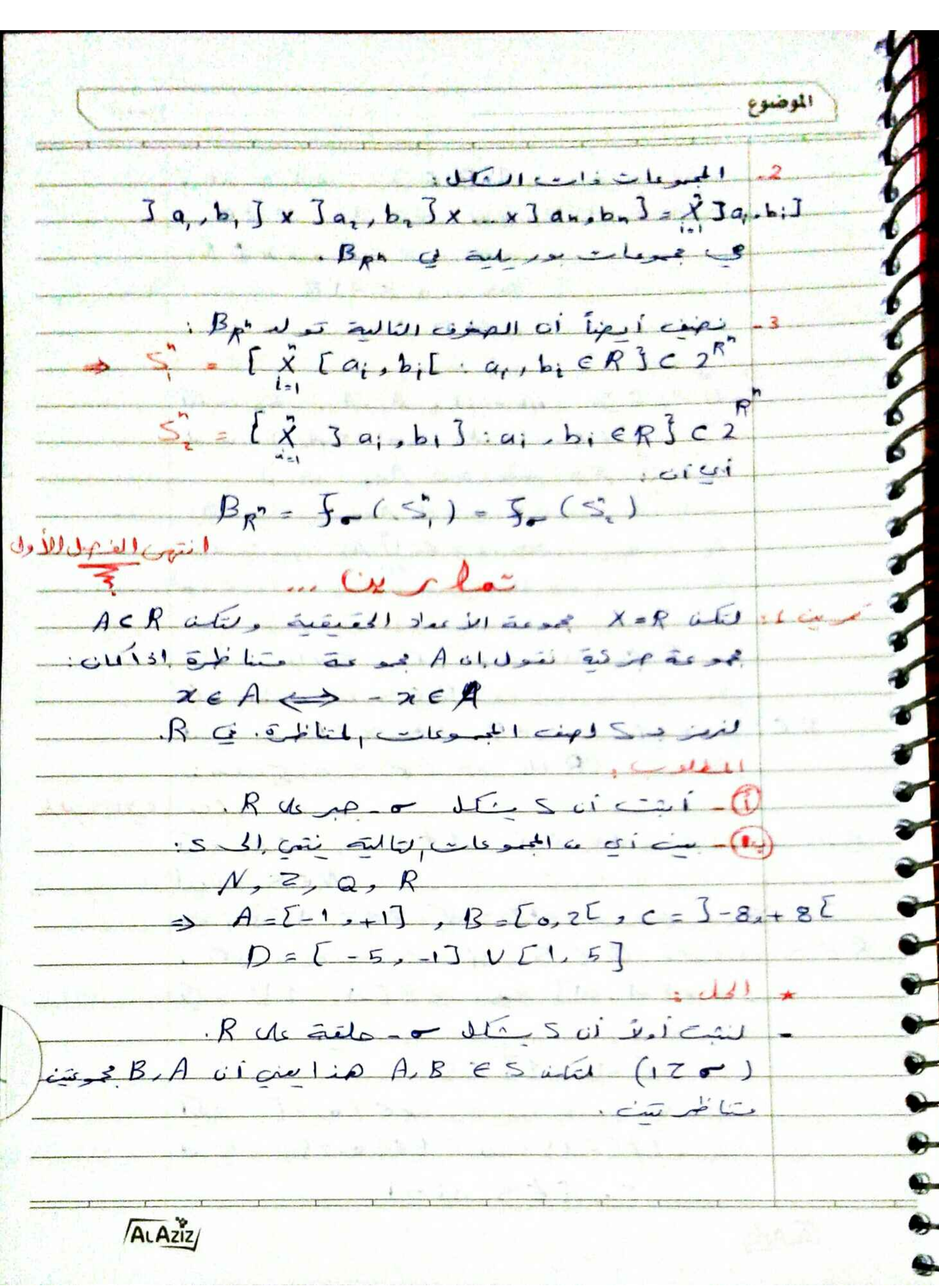
ملاحظة: بالعودة إلى جبر بوريل $B_{\mathbb{R}^n}$ لدينا ما يلي:

1) المجموعات ذات الشكل: (مربع حيث نصف مفتوح في $\mathbb{R}^n$)

$$[a_1, b_1[\times [a_2, b_2[\times \dots \times [a_n, b_n[= \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i[$$

$\prod$ هي جداء ديكارتي.

هي مجموعات بوريلية (أي تنتمي إلى $B_{\mathbb{R}^n}$).



الموضوع

2- المجموعات ذات الشكل:

$$]a_1,b_1] \times]a_2,b_2] \times \dots \times]a_n,b_n] = \overset{n}{\underset{i=1}{X}}]a_i,b_i]$$

هي مجموعات بوريلية في B_{R^n}.

3- نضيف أيضاً أن الصفوف التالية تولد B_{R^n}:

$$\Rightarrow S_1^n = \{ \overset{n}{\underset{i=1}{X}} [a_i,b_i[\; : a_i,b_i \in R \} \subset 2^{R^n}$$

$$S_2^n = \{ \overset{n}{\underset{i=1}{X}}]a_i,b_i] : a_i,b_i \in R \} \subset 2^{R^n}$$

أي أن:

$$B_{R^n} = \mathcal{F}_\sigma(S_1^n) = \mathcal{F}_\sigma(S_2^n)$$

انتهى الفصل الأول

تمارين ...

تمرين 1: لتكن $X=R$ مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن $A \subset R$ مجموعة جزئية نقول ان A مجموعة متناظرة اذا كان:

$$x \in A \iff -x \in A$$

لنرمز بـ S لصف المجموعات المتناظرة في R.

المطلوب:

أ- أثبت أن S يشكل σ-جبر على R.

ب- بين أي من المجموعات التالية ينتمي الى S:

N, Z, Q, R

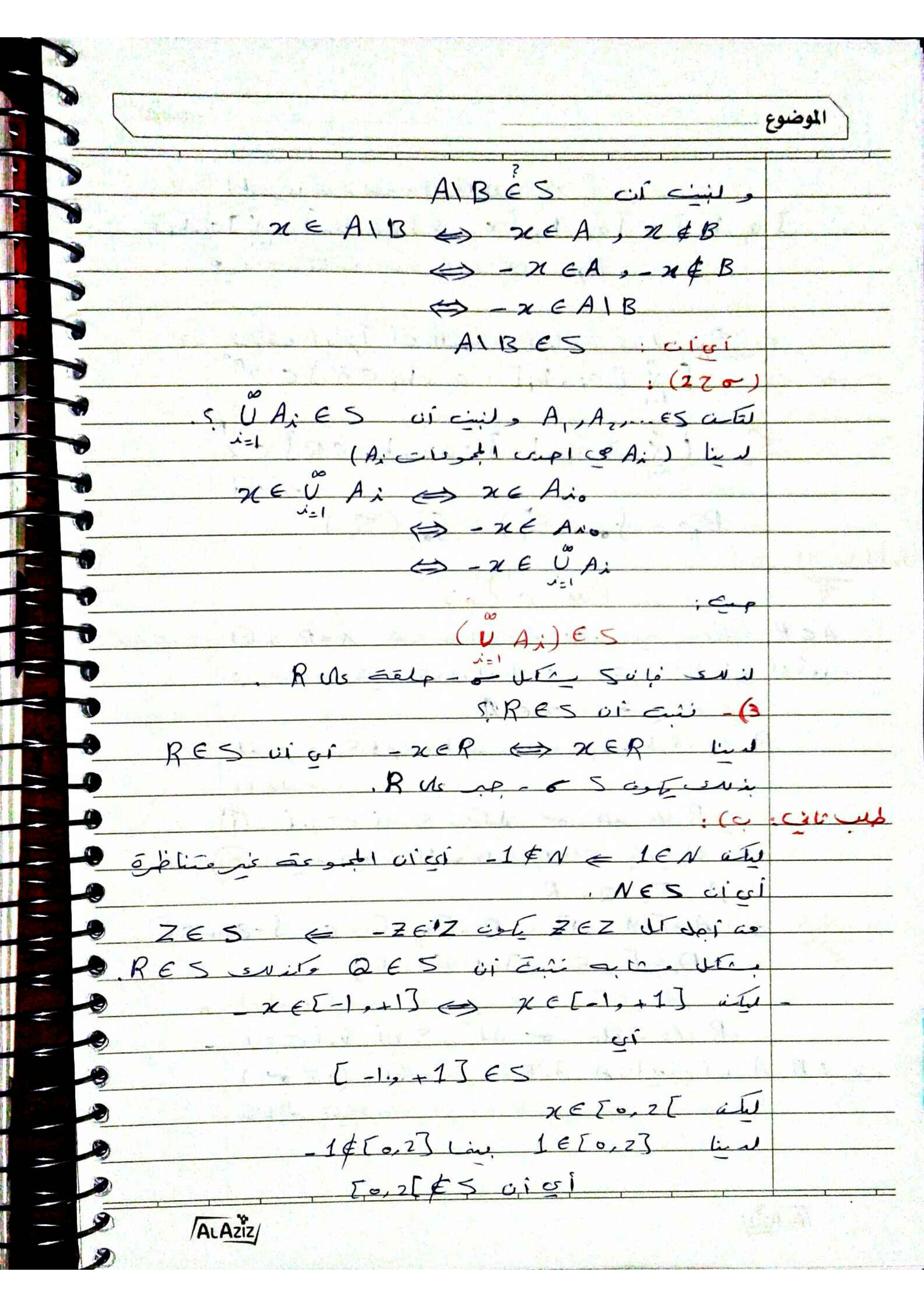
$\Rightarrow A=[-1,+1] \;,\; B=[0,2[\;,\; C=]-8,+8[$

$D=[-5,-1] \cup [1,5]$

★ الحل:

- لنثبت أولاً أن S يشكل σ-حلقة على R.

($\sigma 1$) لتكن $A,B \in S$ هذا يعني أن A، B مجموعتين متناظرتين.



الموضوع

ولنبين أن $A \setminus B \overset{?}{\in} S$

$$x \in A\setminus B \Leftrightarrow x \in A ,\ x \notin B$$
$$\Leftrightarrow -x \in A ,\ -x \notin B$$
$$\Leftrightarrow -x \in A\setminus B$$

أي أن: $A\setminus B \in S$

(س2ج):

لتكن $A_1, A_2, \dots \in S$ ولنبين أن $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$ ؟

لدينا (A_i هي إحدى المجموعات A_i)

$$x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Leftrightarrow x \in A_{i_0}$$
$$\Leftrightarrow -x \in A_{i_0}$$
$$\Leftrightarrow -x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

حيث:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \in S$$

لذلك فإن S يشكل σ- حلقة على R.

3- نثبت أن $R \in S$ ؟

لدينا $x \in R \Leftrightarrow -x \in R$ أي أن $R \in S$

بذلك يكون S σ- جبر على R.

طلب ثاني: ب):

ليكن $1 \in N \Leftarrow -1 \notin N$ أي أن المجموعة غير متناظرة أي أن $N \notin S$.

من أجل كل $z \in Z$ يكون $-z \in Z \Leftarrow Z \in S$

بشكل مشابه نثبت أن $Q \in S$ وكذلك $R \in S$.

- ليكن $x \in [-1,+1] \Leftrightarrow -x \in [-1,+1]$

أي

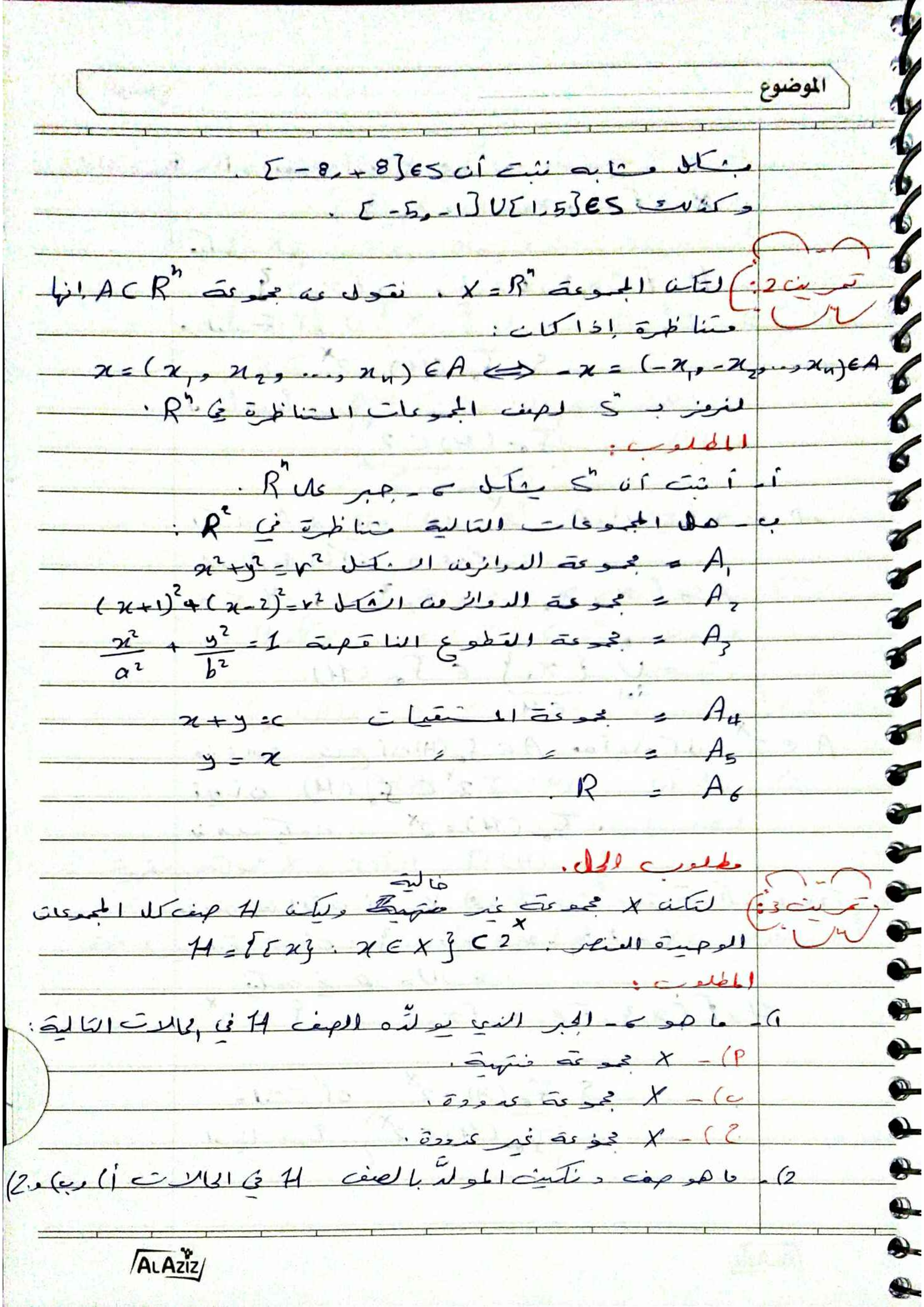
$$[-1,+1] \in S$$

ليكن $x \in [0,2[$

لدينا $1 \in [0,2]$ بينما $-1 \notin [0,2]$

أي أن $[0,2[\notin S$

ALAZIZ



الموضوع

بشكل مشابه نثبت أن $[-8,+8]\in S$.
وكذلك $[-5,-1]\cup[1,5]\in S$.

تمرين 2: لتكن المجموعة $X=R^n$ ، نقول عن مجموعة $A\subset R^n$ إنها متناظرة إذا كانت:

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in A \iff -x=(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)\in A$$

لنرمز بـ S^n لصف المجموعات المتناظرة في R^n .

المطلوب:

أ- أثبت أن S^n يشكل σ-جبر على R^n .

ب- هل المجموعات التالية متناظرة في R^2 :

A_1 = مجموعة الدوائر من الشكل $x^2+y^2=r^2$

A_2 = مجموعة الدوائر من الشكل $(x+1)^2+(x-2)^2=r^2$

A_3 = مجموعة القطوع الناقصة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

A_4 = مجموعة المستقيمات $x+y=c$

A_5 = 〃 〃 $y=x$

A_6 = R .

مطلوب الحل.

تمرين 3: لتكن X مجموعة غير خالية وليكن H صف كل المجموعات الوحيدة العنصر. $H=\{\{x\}: x\in X\}\subset 2^X$

المطلوب:

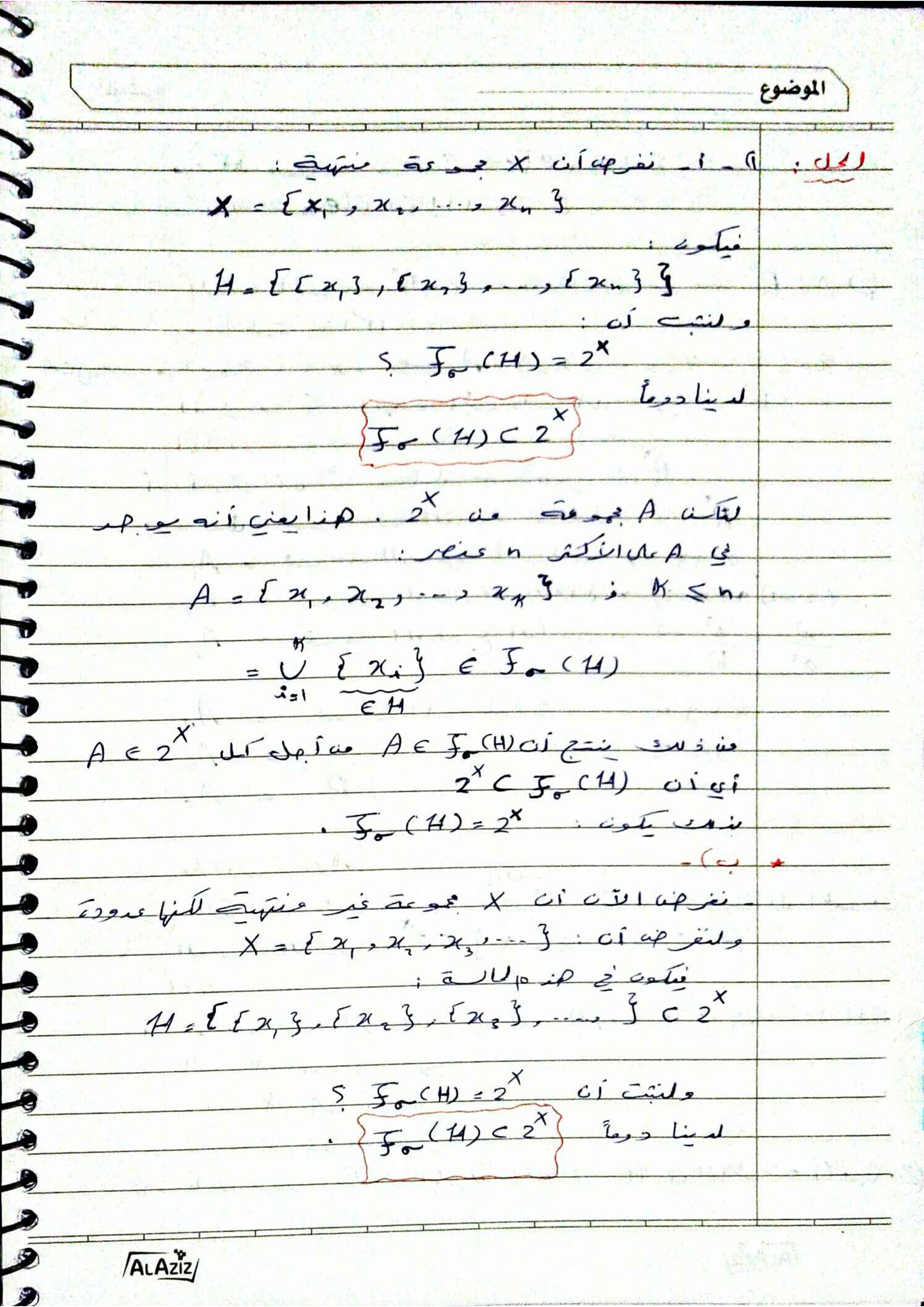
1- ما هو σ-الجبر الذي يولده الصف H في الحالات التالية:

أ- X مجموعة منتهية.

ب- X مجموعة معدودة.

ج- X مجموعة غير معدودة.

2- ما هو صف دنكين المولد بالصف H في الحالات أ) وب) وج).



الموضوع

الحل : ①- أ- نفرض أن X مجموعة منتهية :

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

فيكون :

$$H = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}\}$$

ولنثبت أن :

$$\mathcal{F}_\sigma(H) = 2^X \ ؟$$

لدينا دوماً

$$\boxed{\mathcal{F}_\sigma(H) \subset 2^X}$$

لتكن A مجموعة من 2^X . هذا يعني أنه يوجد في A على الأكثر n عنصر :

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \ ؛ \ k \le n$$

$$= \bigcup_{i=1}^{k} \underbrace{\{x_i\}}_{\in H} \in \mathcal{F}_\sigma(H)$$

من ذلك ينتج أن $A \in \mathcal{F}_\sigma(H)$ من أجل كل $A \in 2^X$

أي أن $2^X \subset \mathcal{F}_\sigma(H)$

بذلك يكون : $\mathcal{F}_\sigma(H) = 2^X$.

ب) -

- نفرض الآن أن X مجموعة غير منتهية لكنها معدودة

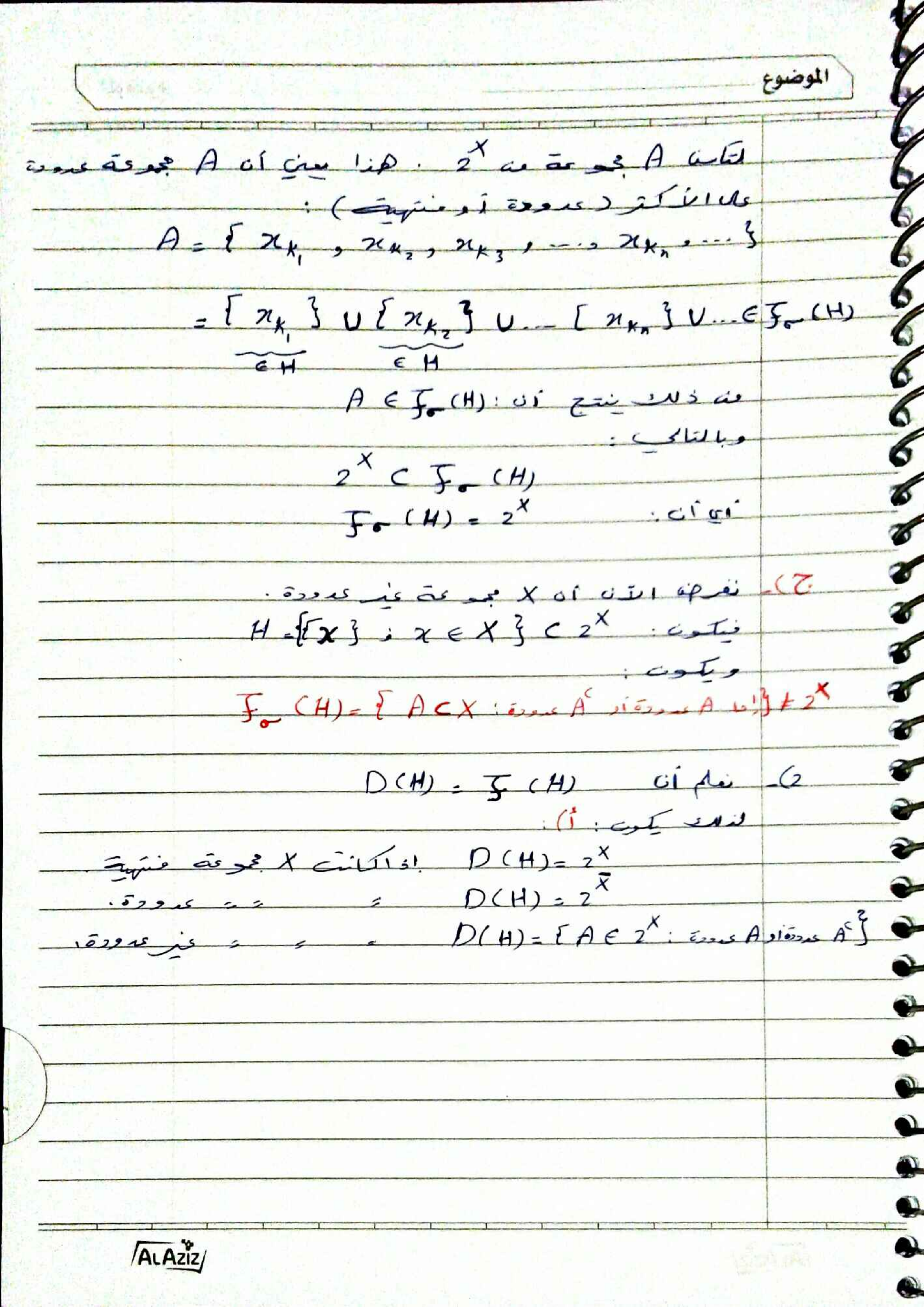
ولنفرض أن : $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

فيكون في هذه الحالة :

$$H = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \dots\} \subset 2^X$$

ولنثبت أن $\mathcal{F}_\sigma(H) = 2^X$ ؟

لدينا دوماً $\boxed{\mathcal{F}_\sigma(H) \subset 2^X}$.



لتكن A مجموعة من 2^X . هذا يعني أن A مجموعة معدودة على الأكثر (معدودة أو منتهية) :

$$A = \{x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \dots, x_{k_n}, \dots\}$$

$$= \underbrace{\{x_{k_1}\}}_{\in H} \cup \underbrace{\{x_{k_2}\}}_{\in H} \cup \dots \{x_{k_n}\} \cup \dots \in \mathfrak{F}_\sigma(H)$$

من ذلك ينتج أن: $A \in \mathfrak{F}_\sigma(H)$

وبالتالي:

$$2^X \subset \mathfrak{F}_\sigma(H)$$

أي أن: $\mathfrak{F}_\sigma(H) = 2^X$

ج- نفرض الآن أن X مجموعة غير معدودة.

فيكون: $H = \{\{x\} ; x \in X\} \subset 2^X$

ويكون:

$\mathfrak{F}_\sigma(H) = \{A \subset X :$ إذا A معدودة أو A^c معدودة $\} \neq 2^X$

د- نعلم أن $D(H) = \mathfrak{F}(H)$

لذلك يكون: أ:

$D(H) = 2^X$ إذا كانت X مجموعة منتهية.

$D(H) = 2^X$ " " " معدودة.

$D(H) = \{A \in 2^X : A$ معدودة أو A^c معدودة $\}$ " " " غير معدودة.